Botos Katalin (szerk.): Pénzügyek és globalizáció
SZTE Gazdaságtudományi Kar Közleményei 2005. JATEPress, Szeged 337–348. o.

Részvényárfolyam-modellezés alfa-stabilis Levy-folyamatok segítségével

*Véber Miklós**

A tanulmányban egy olyan modellosztályt mutatunk be, amely a hagyományosan alkalmazott modelleknél alkalmasabb a relatív gyakran megfigyelt hektikus piaci mozgások leírására. Közismerten a részvényárfolyamok sztochasztikus viselkedése nem mindig modellezhető megfelelően a standard Brown-mozgással. Az alfa-stabilis Levy-folyamatok használata egy lehetséges eszköz lehet a probléma kezelésére, mivel ezen eloszlásoknak nem létezik már a második momentuma sem, így nagyobb valószínűséggel vesznek fel szélsőségesen nagy értékeket, mint a standard Brown-mozgás.

Az alfa-stabilis eloszlások sajátságait figyelembe véve bemutatunk egy új modellosztályt, valamint rámutatunk a modell becsülhetőségének numerikus nehézségeire, illetve kitérünk a modell gyakorlati banki alkalmazhatóságára is.

Kulcsszavak: árfolyammodell, stabilis eloszlások, Levy-folyamat

1. Bevezetés

A tanulmány első részében röviden kitérünk arra, hogy miért is van szükségünk árfolyam-modellezésre, mit várunk el általában az árfolyammodellektől, milyen gyakorlati felhasználási területei vannak ezeknek. Ezek azért fontos kérdések, mert csak ezek ismeretében tudunk megítélni egy modellt olyan szempontból, hogy az megfelelő leíró erővel bír-e vagy sem.

A következőkben az első árfolyammodellekről, valamint ezek hibáiról esik szó. Megismerkedünk a legegyszerűbb általánosítási lehetőségekkel, melyek a modellhibák egy részét orvosolják ugyan, de számos problémára csupán a modell alapjaiban történő megváltoztatása nyújt megoldást. Számos változtatási lehetőség kínálkozik, mi ezek közül eggyel foglalkozunk részletesebben: a részvényárfolyam mozgását befolyásoló, ún. meghajtó folyamatot cseréljük le Brown-mozgásról egy alfa-stabilis Levy-folyamatra.

A legutolsó részben bemutatásra kerül az alfa-stabilis árfolyammodell, valamint ennek maximum likelihood (ML) módszerrel történő becslését vesszük tüzetesebben szemügyre. Ennek megvalósításához meg kell ismerkednünk az alfa-stabilis eloszlások néhány alaptulajdonságával, majd a becslés numerikus nehézségeiről szólunk röviden. Legvégül szó esik az alfa-stabilis modell – az előző részekben leírásra kerülő – két felhasználási területen való alkalmazhatóságáról, valamint a modell melletti pro és kontra érvek kerülnek ismertetésre.

* Véber Miklós, kockázatkezelő, Raiffeisen Bank Rt.
Ezúton szeretnék köszönetet mondani dr. Michaletzky Györgynek a tanulmány mögött álló kutatásban nyújtott segítségéért.

2. Miért van szükség árfolyammodellekre?

A részvényárfolyamok matematikai modellezése bár sokszor kissé öncélú valószínűségelméleti játéknak tűnik, valójában nagy gyakorlati jelentőséggel bír. Egy megfelelő illeszkedést mutató árfolyammodellt alapvetően két területen lehet banki alkalmazásoknál felhasználni:

1. *Piaci (részvény)pozíció kitettségének vizsgálata során:* itt a feladat egy VaR jellegű mutató számítása, azaz első lépésben a pozíció értékének eloszlását kell meghatározni, majd ennek ismeretében egy egyszerű percentilis-számítással azt megállapítani, hogy x százalékos valószínűséggel legfeljebb mennyit veszíthetünk az adott pozícióban. Ezt a fajta kitettségvizsgálatot a bankok számára a Basel II.-es előírások is kötelezővé teszik, tehát ez alapvető fontossággal bír.
2. *Derivatív termékek árazása során:* bár ezen termékek piaca Magyarországon meglehetősen szűk, Amerikában aktívan zajlik az ezekkel való kereskedés. Ezek a határidős, opciós és egyéb pozíciók általában sokkal kockázatosabbak, mint az alaptermékből felépített pozíciók, így ezek árazása, valamint az ebből fakadó veszteség kockázata komoly veszélyt jelenthet a pozíció birtokosa számára.

Ahhoz, hogy a fenti két feladat megoldása megfelelő legyen, egy a valós árfolyamokhoz jól illeszkedő modellt kell választani. Megfelelő illeszkedés alatt a következők értendők:

- a modell a részvényárfolyam mozgásának trendjét kövesse;
- képes legyen az árfolyam értékében bekövetkező ugrásokat lekövetni;
- a derivatív termékeket jól árazza;
- és sok más egyéb szempontnak is megfeleljen, ám ezekről most nem ejtünk szót részletesebben.

3. A CRR modelltől az alfa-stabilis Levy-folyamatokig

Az egyik legelső és legegyszerűbb részvényárfolyam-modell a Cox–Ross–Rubinstein modell volt (Száz 1999, Musiela 1997), amelyben a részvényárfolyam (S_t) mozgása a következő alakot ölti:

$$S_{t+1} = S_t \cdot \zeta_t \text{ ahol } \zeta_t \in \{u,d\} \text{ és } P(\zeta_t = u) = p = 1 - P(\zeta_t = d)\,,$$

azaz a részvényárfolyam bármelyik időpillanatban két dolgot tehet:

- p valószínűséggel u-szorosára nő;
- (1-p) valószínűséggel d-szeresére csökken.

A részvény mellett egy másik pénzügyi termék is megjelenik ebben a modellben, ez pedig egy kamatosan kamatozó kötvény, melynek árfolyama:

$$B_t = (1 + r)^t$$

Egy ilyen kéttermékes piacon a 2. részben említett mindkét alapfeladat könnyen megoldható, ám ezek megoldására terjedelmi okokból nem térünk ki, viszont kiváló leírás található erről: (Száz 1999).

A CRR modell egyik legfőbb hiányossága, hogy a *részvényárfolyam elmozdulása erősen korlátozott*, hiszen két eset van csupán, vagy u-szorosára nő, vagy d-szeresére csökken. A valóság ennél sokkal bonyolultabb, az elmozdulások sokkal szélesebb skálán mozognak, gyakorlatilag bármilyen értéket felvehet a következő időszaki részvényárfolyam. A másik probléma a CRR modellel az, hogy diszkrét időpillanatokban, *egyenletes időközönként változik a részvényárfolyam.*

Ezen a két problémán segít a Black-Scholes modell (Black 1973). Alapvetően itt is egy kéttermékes piaccal állunk szemben, ahol a részvényárfolyam változását egy sztochasztikus, a kötvényárfolyamét pedig egy determinisztikus differenciálegyenlet írja le. A kötvényárfolyam a

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

a részvényárfolyam pedig a

$$dB_t = rB_t dt$$

differenciálegyenletet elégíti ki, ahol W_t a standard Brown-mozgást (Wiener-folyamatot) jelöli. Mindkét egyenlet könnyen meg is oldató, a kötvényárfolyam t időpontbeli értéke:

$$B_t = B_0 \exp\{rt\},$$

a részvényárfolyamé pedig:

$$S_t = S_0 \exp\left\{\sigma W_t + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t\right\}$$

Ez utóbbi alapján egy részvénypozíció kitettségének becslése egyszerű feladat, mivel:

$$\sigma W_t + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t \sim N\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t; \sigma^2 t\right),$$

ezért S_t eloszlása lognormális.

A különböző derivatív termékek árazása már bonyolultabb feladat, melyhez egy-két alapvető fogalom bevezetése szükséges. *Stratégia* alatt egy olyan $\Pi_t = (\beta_t; \gamma_t)$ függvénypárt értünk, ahol β_t jelöli a t. időpillanatban tartott kötvények, γ_t pedig a részvények számát. *Tőkefolyamaton* a pozíció aktuális piaci értékét értjük, azaz

$$X_t = \beta_t B_t + \gamma_t S_t.$$

Önfinanszírozó egy Π stratégia, ha folytonos kereskedést feltételezve sem tőkebepumpálásra, sem tőkeelvonásra nem kerül sor, azaz mindig annyi plusz részvényt vásárolunk (adunk el), amekkora bevétel a kötvényértékesítésből származott (amekkora összeg a kötvényvásárláshoz szükséges), azaz:

$$dX_t = \beta_t dB_t + \gamma_t dS_t.$$

Hedge-nek nevezünk egy olyan önfinanszírozó stratégiát, mely fix pénzösszeggel indulva 1 valószínűséggel legalább akkora végső kifizetést nyújt, mint egy adott pénzügyi derivatív termék, azaz:

$$X_0^\pi = x \quad \text{és} \quad X_T^\pi \geq f_T,$$

ahol f_T jelöli a derivatíva kifizetőfüggvényét. Például egy európai típusú vételi opció estén ez:

$$f_T = |S_T - K|_+$$

ahol K a kötési árfolyam; $|a|_+$ pedig 0, ha $a \leq 0$; különben pedig a.

Egy derivatíva *racionális ára* az a minimális kezdőtőke, amellyel indulva még létezik azt fedező hedge, azaz:

$$\mathbb{C}_T(f_T) = \inf\{x > 0 : \text{létezik } \Pi\ f_T\text{-hedge, hogy } X_0^\pi = x\}$$

Az európai vételi opció esetében ez az ár a Black–Scholes modell feltételei mellett a következő alakot ölti (részletes számolás: Shiryayev 1994):

$$\mathbb{C}_T = S_0 \Phi(y_1) - \frac{K}{B_T}\Phi(y_2)$$

ahol

$$y_{1,2} = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r \pm \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

A Black–Scholes modell bár könnyen kezelhető módon írja le mind a részvényárfolyam, mind a kötvényárfolyam mozgását, olyan feltételezésekkel él, amelyek a valóságban nem teljesülnek. Ezek a következők:

– a részvényárfolyam fejlődésében egy állandó exp $\{\mu t\}$ trend van;
– állandó a volatilitás (σ);
– a részvényárfolyam elmozdulása nem függ az előző időszak értékétől;
– a spot kamatláb állandó (r).

Ezek a megállapítások még jobban láthatóak, ha a részvényárfolyamot $S_t = \exp\{\xi_t\}$ alakban képzeljük el és az Ito formula segítségével (Liptser 1977) ξ_t-re írjuk fel a sztochasztikus differenciálegyenletet:

$$d\xi_t = \left[\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right]dt + \sigma dW_t$$

A Black-Scholes modell ezen hiányosságait orvosolja egy olyan általánosabb modell, ahol ξ_t a következő differenciálegyenletet elégíti ki:

$$d\xi_t = [\lambda(t)\,\xi_t + \mu(t)]\,dt + \sigma(t)\,dW_t$$

ahol $\lambda(t)$, $\mu(t)$, $\sigma(t)$ determinisztikus függvények, $\lambda(t)$ adja a modell autoregresszív jellegét, $\mu(t)$ a trendet, $\sigma(t)$ pedig a változó volatilitásról gondoskodik. A kötvényárfolyam alakulását szintén egy változó, de determinisztikus spot kamatláb írja le:

$$dB_t = r(t)\,B_t dt$$

amiből:

$$B_t = B_0 \exp\left\{\int_0^t r(s)\,ds\right\}.$$

A részvényárfolyam logaritmusát leíró sztochasztikus differenciálegyenlet szintén megoldható (Arnold 1984):

$$\xi_t = \Psi(t)\left[\xi_0 + \int_0^t \Psi^{-1}(s)\mu(s)\,ds + \int_0^t \Psi^{-1}(s)\sigma(s)\,dL_a(s)\right]$$

ahol $\Psi(t)$ a

$$\dot{\Psi}(t) = \lambda(t)\,\Psi(t) \qquad \Psi(0) = 1$$

közönséges differenciálegyenlet megoldása. Ebből látható az is, hogy ξ_t eloszlása normális, így S_t eloszlása lognormális lesz, azaz egy részvénypozíció kitettsége könnyen számítható ebben az általánosabb modellben is.

A derivatív termékek árazása sem sokkal bonyolultabb, egy egyszerű európai típusú vételi opció ára (Véber 2001):

$$\mathbb{C}_T = S_0\Phi(y_1) - \frac{K}{B_T}\Phi(y_2)$$

ahol

$$y_{1,2} = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) \pm \frac{v}{2} + \varphi}{\sqrt{v}} \qquad v = \int_0^t \sigma^2(s)\,ds \qquad \varphi = \int_0^t r(s)\,ds.$$

Láthatóan a $\mu(t)$, illetve $\lambda(t)$ függvények semmilyen szerepet nem játszanak az opció árában, az csupán a részvényárfolyam volatilitásától függ.

Akármilyen (kellően sima) $\sigma(t)$ függvényt választunk is, egyrészt a részvényárfolyam eloszlása lognormális marad, másrészt a modell nem lesz képes olyan ugrásokat, olyan kaotikus viselkedést produkálni, mint amilyen hektikus ingadozások a valóságban a részvényárfolyamban bekövetkeznek. Ahhoz, hogy a modell ezt le tudja követni, a folyamatot kell lecserélni Brown-mozgásról valami más, kaotikusabb viselkedést mutató folyamatra. A szakirodalomban a lehetőségek széles spektrumát megtalálhatjuk ennek a problémának a kezelésére, mi a továbbiakban ezek közül egy lehetséges megoldást, az alfa-stabilis Levy-folyamatok alkalmazását vizsgáljuk meg részletesebben.

4. Az alfa-stabilis árfolyammodell

A jobb érthetőség kedvéért mielőtt az alfa-stabilis árfolyammodell ismertetésébe belekezdenénk, egy pár szót szólunk az alfa-stabilis Levy-folyamatokról. Ezek olyan sztochasztikus folyamatok, amik:

- *független növekményűek:* azaz egy adott t időpillanatbeli értéktől nem függ az, hogy a folyamat hogyan fejlődik a t időpillanat után, vagy más szóval minden olyan információ tükröződik a folyamat t időpontbeli értékében, ami az adott időpillanatig rendelkezésre áll (tökéletes informáltság);
- *stacionárius növekményű:* azaz nincs törés a folyamatban, egy adott t időpillanat után ugyanúgy fejlődik tovább, mint egy másik s időpont után;
- a növekmények eloszlása *stabilis.*

- A stabilis eloszlások lényegében azok az eloszlások, amik határeloszlásként származtathatóak (pontos definíció: (Samorodnitsky 1994)), azaz sok kis apró véletlen hatás eredőjeként állnak elő. Bizonyítható, hogy ezek az eloszlások 4 paraméter segítségével könnyen leírhatóak, éppen ezért a következőkben ezzel a 4 paraméterrel jelöljük őket: $S_a(\sigma, \beta, \mu)$, ahol:
- a az ún. stabilitási index (vagy karakterisztikus kitevő), ami onnan kapta a nevét, hogy ugyanolyan stabilitási indexű független stabilis valószínűségi változók összege is stabilis lesz, továbbá az összegváltozó stabilitási indexe ugyanaz lesz, mint a tagoké, precízen:
-

(1) Ha $X_i \sim S_a(\sigma_i, \beta_i, \mu_i)$ $(i = 1,2)$ független valószínűségi változók, akkor

$$X_1 + X_2 \sim S_a(\sigma, \beta, \mu),$$

ahol:

$$\sigma = \left(\sigma_1^a + \sigma_2^a\right)^{1/a} \qquad \beta = \frac{\beta_1\sigma_1^a + \beta_2\sigma_2^a}{\sigma_1^a + \sigma_2^a} \qquad \mu = \mu_1 + \mu_2$$

Ez a stabilitási index a $0 < a \le 2$ tartományba esik, és amennyiben $a = 2$, akkor normális eloszlással van dolgunk.

- β ferdeségi mutató, amely $-1 \le \beta \le 1$ tartományban veszi fel értékeit;
- $\sigma > 0$ skálaparaméter, azaz:
  (2a) $aS_a(\sigma, \beta, \mu) = S_a(|a|\sigma, \operatorname{sgn}(a)\beta, a\mu)$, ha $a \ne 1$
  (2b) $aS_a(\sigma, \beta, \mu) = S_a\left(|a|\sigma, \operatorname{sgn}(a)\beta, a\mu - \frac{2}{\pi}a(\ln|a|)\sigma\beta\right)$, ha $a = 1$.
- $\mu \in \mathbb{R}$ eltolásparaméter, azaz:
  (3) $S_a(\sigma, \beta, \mu) + a = S_a(\sigma, \beta, \mu + a)$.

Ezek az eloszlások, mivel sok véletlen hatás eredőjeként állnak elő, ezért nem a sűrűségfüggvényükkel, hanem a karakterisztikus függvényükkel írhatók le könnyen:

$$\exp\left\{-\sigma^a|\Theta|^a\left(1 - i\beta(\operatorname{sgn}\Theta)\tan\frac{\pi\alpha}{2}\right) + i\mu\Theta\right\} \qquad \text{ha } a \ne 1$$

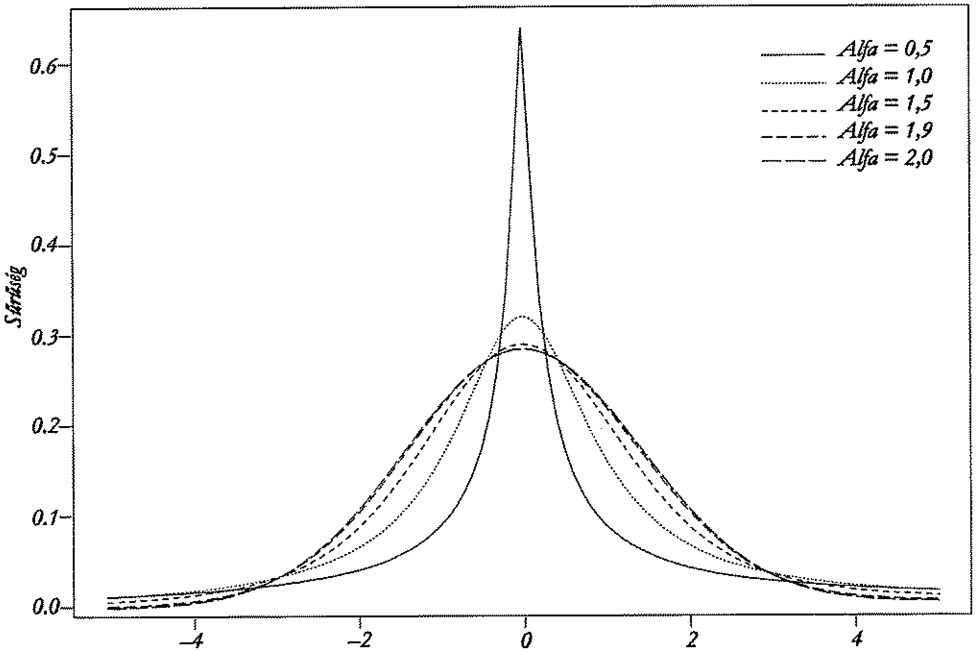
$$\exp\left\{-\sigma|\Theta|\left(1 + i\beta\frac{2}{\pi}(\operatorname{sgn}\Theta)\ln|\Theta|\right) + i\mu\Theta\right\} \qquad \text{ha } a \ne 1$$

Zárt alakban előálló sűrűségfüggvény csak 4 speciális esetben van:

- normális eloszlás: $S_2(\sigma, 0, \mu)$
- Cauchy eloszlás: $S_1(\sigma, 0, \mu)$
- Levy eloszlás: $S_{1/2}(\sigma, 1, \mu)$
- elfajult (konstans) eloszlás: $S_a(0, 0, \mu)$

Az 1. ábra különböző a indexű szimmetrikus $(\beta = 0)$ stabilis eloszlások sűrűségfüggvényét hasonlítja össze:

1. ábra. Szimmetrikus stabilis eloszlások sűrűségfüggvényei különböző alfa paraméterek mellett

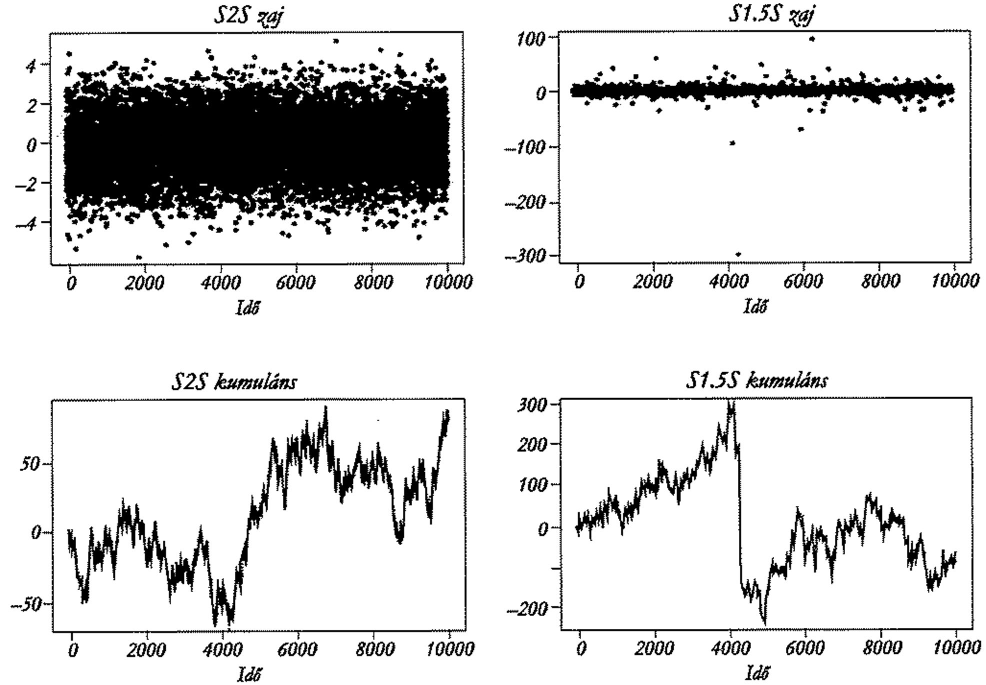


Forrás: Saját szerkesztés

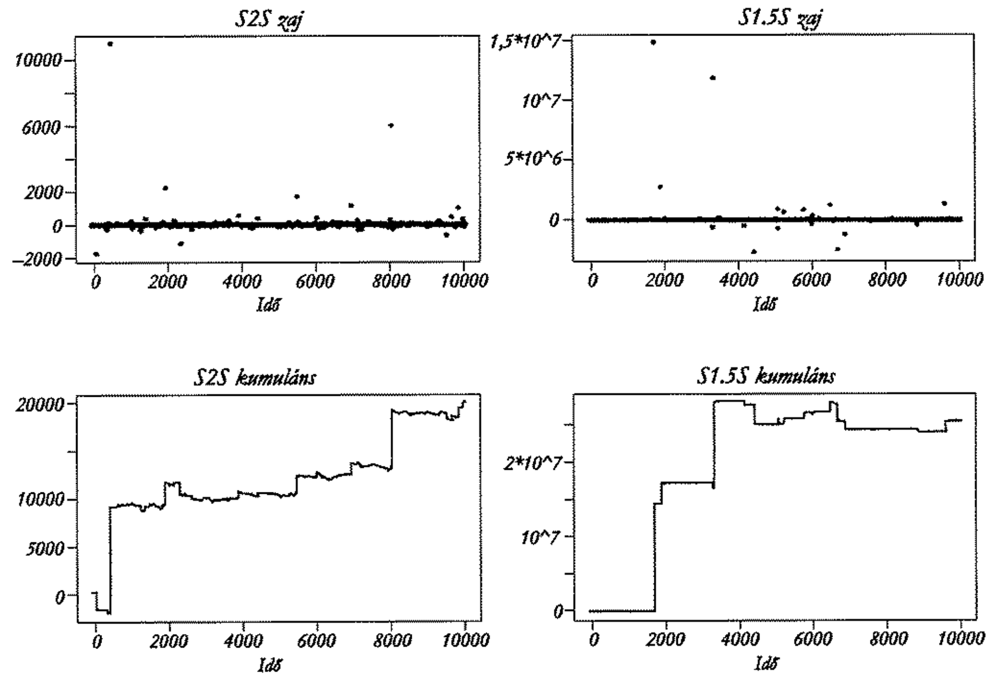
Jól láthatóan *a* minél kisebb, egyrészt annál csúcsosabb az eloszlás, másrészt annál jobban érvényesül a fat tail („vastag farok") hatás, tehát annál nagyobb valószínűséggel vesz fel extremálisan nagy értékeket az eloszlás.

A modellünket meghajtó stabilis Levy-folyamatban a *s*-ből *t* időpontba való elmozduláskor növekmény eloszlása $S_a(t-s, \beta, 0)$ lesz. Annak bemutatására, hogy *a* csökkenésével milyen mértékben tud kaotikussá válni ez a folyamat, tekintsük a következő illusztrációt. A 2. és 3. ábra 10 000 db $S_a(1, 0, 0)$ független valószínűségi változót (alfa-stabilis zaj) mutat $a = 2$; 1,5; 1, illetve 0,5 esetekben, majd ezek kummuláltjaként az ezekből származtatott diszkrét alfa-stabilis Levy-folyamatot illusztrálja.

2. ábra. Szimmetrikus alfa-stabilis zaj és a kumuláns folyamat (alfa=2 és 1,5)



3. ábra. Szimmetrikus alfa-stabilis zaj és a kumuláns folyamat (alfa=1 és 0,5)



Míg $a = 2$ esetben a zaj nagyjából a [–3;3] intervallumon belülre korlátozódik (normális eloszlásnál érvényesül a „six-sigma" elv), és ennek megfelelően a kumuláns folyamat sem lép ki a $[-10^2; 10^2]$ sávból, addig $a = 1/2$ esetben a zaj akár 10^7 nagyságrendű értéket is felvehet, óriási ugrásokat eredményezve a kumuláns folyamatban.

Ezen kis kitekintés után visszatérünk árfolyammodellünk bemutatására. A 3. részben ismertetett általánosított Black–Scholes modellből indulunk ki, csupán a meghajtó folyamatot cseréljük ki, azaz a részvényárfolyamot itt is $S_t = \exp\{\xi_t\}$ alakban állítjuk elő, ahol ξ_t a következő sztochasztikus differenciálegyenletet elégíti ki:

$$d\,\xi_t = [\,\lambda(t)\xi_t + \mu(t)\,]dt + \sigma(t)dL_a(t)$$

ahol $L_a(t)$ egy alfa-stabilis Levy-folyamat.

A differenciálegyenlet (akárcsak az általánosított Black–Sholes modellnél) könnyen megoldható:

$$(4)\quad \xi_t = \Psi(t)\left[\xi_0 + \int_0^t \Psi^{-1}(s)\mu(s)\,ds + \int_0^t \Psi^{-1}(s)\,\sigma(s)\,dL_a(s)\right]$$

ahol $\Psi(t)$ ismételten a $\dot{\Psi}(t) = \lambda(t)\Psi(t)$; $\Psi(0) = 1$ differenciálegyenlet megoldása. A ξ_t folyamat megfigyelési időpontjai legyenek:

$$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n$$

Ezen időpontbeli megfigyelésekből szeretnénk a modell $\lambda(t)$, $\mu(t)$, $\sigma(t)$ függvényeit becsülni. Ehhez 3 dolgot kell tenni:

- lehetőleg minél kevesebb paraméterrel felparaméterezni a $\lambda(t)$, $\mu(t)$, $\sigma(t)$ függvényeket;
- ezen paraméterekkel felírni a megfigyelések együttes sűrűségfüggvényét;
- ezt a paraméterekben maximalizálva ML becslést adni magukra a paraméterekre.

Az első lépésnél (a függvények paraméterezésénél) rengeteg lehetőség áll az elemző előtt. Első körben érdemes konstans függvényeket vizsgálni, majd megpróbálkozni polinomokkal, exponenciális vagy trigonometrikus függvényekkel. Mivel a lehetőségek tárháza igencsak gazdag és terjedelmi okokból itt nem tudunk kitérni minden esetre, ezért a továbbiak folyamán ettől a paraméterezéstől eltekintünk és a $\lambda(t)$, $\mu(t)$, $\sigma(t)$ függvények segítségével általánosan írjuk fel az együttes sűrűségfüggvényt.

Jelölje:

$$\eta_1 = \xi_0 + \int_0^{t_1} \Psi^{-1}(s)\mu(s)\,ds + \int_0^{t_1} \Psi^{-1}(s)\,\sigma(s)\,dL_a(s)$$

$$\eta_k = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \Psi^{-1}(s)\mu(s)\,ds + \int_{t_{k-1}}^{t_k} \Psi^{-1}(s)\,\sigma(s)\,dL_a(s) \qquad 2 \le k \le n$$

Ekkor

$$\xi_{t_k} = \Psi(t_k)\,(\eta_1 + \eta_2 + \ldots + \eta_k)$$

Az (1), (2a), (2b), (3) alaptulajdonságok felhasználásával egy alfa-stabilis integrál eloszlása könnyen meghatározható:

$$(5)\quad \int_0^t f(s)\,dL_a(s) \sim \begin{cases} S_a\left(\left(\int_0^t f^a(s)\,ds\right)^{1/a}, \beta, 0\right) & \text{ha } a \neq 1 \\ S_1\left(\int_0^t f(s)\,ds, \beta, \frac{-2\beta}{\pi}\int_0^t f(s)\ln f(s)\,ds\right) & \text{ha } a = 1 \end{cases}$$

Így egy egyszerű változó-transzformációval $a \neq 1$ esetben a $\left(\xi_{t_1}, \xi_{t_2}, \ldots, \xi_{t_n}\right)$ véletlen vektor sűrűségfüggvénye a $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ helyen:

$$\frac{1}{\Psi(t_1)\cdot\Psi(t_2)\cdot\ldots\cdot\Psi(t_n)} f_{\eta_1}\left(\frac{c_1}{\Psi(t_1)}\right) f_{\eta_2}\left(\frac{c_2}{\Psi(t_2)} - \frac{c_1}{\Psi(t_1)}\right) f_{\eta_3}\left(\frac{c_3}{\Psi(t_3)} - \frac{c_2}{\Psi(t_2)}\right)\cdot\ldots$$
$$\ldots\cdot f_{\eta_n}\left(\frac{c_n}{\Psi(t_n)} - \frac{c_{n-1}}{\Psi(t_{n-1})}\right)$$

ahol f_{η_k} az η_k valószínűségi változó sűrűségfüggvénye.

Bevezetve a

$$\mu_1 = \xi_0 + \int_0^{t_1} \Psi^{-1}(s)\mu(s)\,ds, \qquad \mu_k = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \Psi^{-1}(s)\mu(s)\,ds, \qquad 2 \le k \le n$$

$$\sigma_k = \left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} \left(\Psi^{-1}(s)\,\sigma(s)\right)^a ds\right)^{1/a}, \qquad 1 \le k \le n$$

jelöléseket $\eta_k \sim S_a(\sigma_k, \beta, \mu_k)$ és $f_{\eta_k}(x) = \frac{1}{\sigma_k} f_a^\beta\left(\frac{x - \mu_k}{\sigma_k}\right)$ ahol f_a^β egy $S_a(1, \beta, 0)$ változó sűrűségfüggvénye, így a $\left(\xi_{t_1}, \xi_{t_2}, \ldots, \xi_{t_n}\right)$ véletlen vektor sűrűségfüggvénye a

$$\frac{1}{\Psi(t_1)\cdot\ldots\cdot\Psi(t_n)}\cdot\frac{1}{\sigma_1}\cdot f_a^\beta\left(\frac{\frac{c_1}{\Psi(t_1)} - \mu_1}{\sigma_1}\right)\cdot\ldots\cdot\frac{1}{\sigma_n}\cdot f_a^\beta\left(\frac{\frac{c_n}{\Psi(t_n)} - \frac{c_{n-1}}{\Psi(t_{n-1})} - \mu_n}{\sigma_n}\right)$$

alakot ölti.

$a = 1$ esetben hasonló számolással ugyanez a sűrűségfüggvény:

$$\frac{1}{\Psi(t_1)\cdot\ldots\cdot\Psi(t_n)}\cdot\frac{1}{\sigma_1}\cdot f_1^\beta\left(\frac{\frac{c_1}{\Psi(t_1)} - \mu_1}{\sigma_1} - \frac{2\beta}{\pi}\ln\sigma_1\right)\cdot\ldots\cdot\frac{1}{\sigma_n}\cdot f_1^\beta\left(\frac{\frac{c_n}{\Psi(t_n)} - \frac{c_{n-1}}{\Psi(t_{n-1})} - \mu_n}{\sigma_n} - \frac{2\beta}{\pi}\ln\sigma_n\right)$$

Jól látható, hogy ezen függvények maximalizálása még konstans $\lambda(t)$, $\mu(t)$, $\sigma(t)$ függvények esetén is csupán numerikus módszerekkel kivitelezhető, hiszen a maximalizálandó kifejezésben benne maradt az f_a^β függvény, amely maga is csak speciális esetekben áll elő zárt alakban, egyébként csupán numerikusan számolható. Amennyiben azonban a paraméterbecslés numerikus nehézségein túljutunk egy jól illeszkedő, kaotikus ugrásokat is leírni képes modellt kapunk. Ezzel a modellel egy részvénypozíció kitettsége könnyen becsülhető, hiszen (4) és (5) összevetésével ξ_t eloszlása alfa-stabilis lesz, ahol a paraméterek is könnyen számíthatók. A derivatív termékek árazása már nehezebb feladat, terjedelmi okokból erre itt nem térünk ki, de a szakirodalomban erre is találhatók szép eredmények.

5. Összegzés

A bemutatott alfa-stabilis árfolyammodell egy elég széles modellcsaládot ölel fel, mely speciálisan a Black-Scholes modellt és annak általánosított formáját is magában foglalja. Terjedelmi okokból nem térünk ki konkrétabb modellezési eredményekre, a tanulmány célja inkább gondolatébresztés volt, rámutatva az alfa-stabilis modellek alkalmazásában rejlő lehetőségekre és veszélyekre.

Mindent összevetve a bemutatott modellcsalád előnye, hogy:

1. kaotikus piaci szcenáriók leírására kiválóan alkalmas;
2. az ugyanolyan kitevőjű α-stabilis eloszlások családja zárt a konvolúcióra illetve a skálázásra, így a VaR becslés relatíve nem nehéz.

Az előnyök mellett persze számos hátrány is megemlítendő:

1. az előnyök kapcsán említésre került, hogy a VaR becslés csak relatíve nem nehéz. Azért csak relatíve van ez így, mivel ehhez először becsülni kell a modell paramétereit, amely során számos numerikus problémával kell megküzdeni;
2. a származékos termékek árazása komplikált;
3. túlságosan pesszimista képet ad.

Ami tehát a modell előnye, hogy kaotikus piaci szituációk leírására alkalmas, az kicsit a hátránya is. Szerencsére a valóság azért nem ennyire extrém, a piacok ritkán viselkednek annyira hektikusan, mint azt a modellünk indukálná. A gyakorlatban alig használnak 1,5-nél kisebb α-jú modellt, azt is inkább csak 3 esetben:
- tick-by-tick adatok elemzésekor;
- stressztesztek végzésekor („worst case scenario"-k leírására)
- gazdasági krízishelyzetek, extremális események modellezésére.

Normál gazdasági környezetben és/vagy hosszú távú adatsorok esetén a Brown-mozgás által meghajtott modellek is kielégítő eredményt szolgáltatnak.

Felhasznált irodalom

Arnold, L. 1984: *Sztochasztikus Differenciálegyenletek. Elmélet és Alkalmazás.* Műszaki Könyvkiadó, Budapest.

Black, F. – Scholes, M. 1973: The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy.* 81, 637–654. o.

Liptser, R. S. – Shiryayev, A. N. 1977: *Statistics of Random Processes. I. General Theory.* Springer-Verlag, New York.

Musiela, M. – Rutkowski, M. 1997: *Martingale Methods in Financial Modelling.* Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg.

Samorodnitsky, G. – Taqqu, M. S. 1994: *Stable Non-Gaussian Random Processes. Stochastic Models with Infinite Variance.* Chapman & Hall, New York–London.

Shiryayev, A. N. – Kabanov, Y. M. – Kramkov, O. D. – Melnikov, A. U. 1994: Toward the theory of pricing of options of both European and American types. II. Continuous time. *Theory of Probability and its Applications.* 39, 61–102. o.

Száz J. 1999: *Tőzsdei Opciók Vételre és Eladásra.* Tanszék Kft., Budapest.

Véber M. 2001: *Opcióárazás Lineáris Sztochasztikus Differenciálegyenletek Által Leírt Árfolyammodellekben.* Szakdolgozat, ELTE TTK, Valószínűségelméleti és Statisztika Tanszék.